

Практическая работа №4

Производная и ее геометрический смысл. Правило Лопиталя.

Время на выполнение: 90 минут ПР №4. ПР №5-90 минут.

Перечень объектов контроля и оценки

Наименование объектов контроля и оценки	Основные показатели оценки результата	Оценка
Сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций, знать геометрический смысл производной, применять правило Лопиталя.	Вычислять интегралы (заменой переменной, по частям).	1 балл за каждое задание
2. Сформировать умение вычислять неопределенные интегралы и определенные, используя различные методы интегрирования.		
31. Основные понятия и методы математического анализа	Определения первообразной для функции. Неопределенного интеграла, операция интегрирования, свойства неопределенного интеграла. Таблицу неопределенных интегралов, алгоритм замены переменной. Определение определенного интеграла и его свойства	

За верное решение работы выставляется положительная оценка – 10 баллов

За неверное решение работы выставляется положительная оценка – 0 баллов

Теоретические сведения к практической работе

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения

приращения функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной

Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Обозначения производной в точке x_0 :

$$f'(x_0), \frac{dy}{dx} \Big|_{x_0}, \frac{df(x_0)}{dx}, y'_x \Big|_{x_0}, y'(x_0) \text{ и другие.}$$

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется дифференцируемой в этой точке (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется дифференцированием.

Геометрический смысл производной.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$,

то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$).

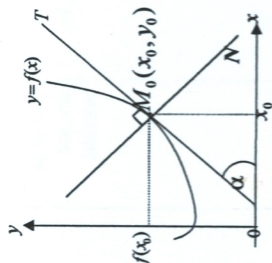
Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$

в точке x_0 (прямая M_0T) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad (2)$$

а уравнение нормали (M_0N):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (3)$$



Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x),$ дифференцируемые функции	№ пп	$V = v(x)$ дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x),$ дифференцируемые функции	$V = v(x)$ дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$			VI	Производная сложной функции $y = f[u(x)], y' = f'_u u'_x$	Производная сложной функции
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$			VII	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$	Функция задана параметрическими уравнениями
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u', c = \text{const}$					
IV	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, (v(x) \neq 0)$					Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \frac{1}{y'_x}, (y'_x \neq 0)$.
V	$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}, (v(x) \neq 0)$			VIII		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	$c = \text{const},$ $u = u(x)$ — дифференцируемая функция	x — независимая переменная
1	$C' = 0$	9 $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	$x' = 1$	10 $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	11 $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	12 $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, u < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	13 $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, u < 1$
6	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} (u > 0)$	14 $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \frac{u'}{u} (u > 0)$	15 $(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	

Производной n -го порядка называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

$$\text{Производная второго порядка } y'' = (y')' \text{ или } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$\text{Производная третьего порядка } y''' = (y'')' \text{ или } \frac{d^3 y}{dx^3} \text{ и т. д.}$$

Пример 1. Найти производные функций:

$$a) y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3}; \quad b) s = (e' - 2 \ln t) \sin t; \quad c) u = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}; \quad d) z = \frac{\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2}.$$

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' = 3 \cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t , т. е. $t' = 1$, получим: \square

$$s = [(e' - 2 \ln t) \sin t]' = (e' - 2 \ln t)' \sin t + (e' - 2 \ln t)(\sin t)' = ((e')' - 2(\ln t)') \sin t + (e' - 2 \ln t) \cos t = \left(e' - \frac{2}{t}\right) \sin t + (e' - 2 \ln t) \cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v , т. е. $v' = 1$; \square используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right)^2 \right]' = 2 \left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right)' \left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right) = 2 \left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right) \left(-\frac{\left(\frac{v}{3} \right)'}{\sin^2 \frac{v}{3}} \right) = -2 \operatorname{ctg} \frac{v}{3} \left(-\frac{1}{3} \right) \frac{2 \operatorname{ctg} \frac{v}{3}}{\sin^2 \frac{v}{3}} = -\frac{2 \cos \frac{v}{3}}{3 \sin^3 \frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что $t' = 1$, получим: \square

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg} 2t}{1 + 4t^2} \right)' = \frac{(\operatorname{arctg} 2t)'(1 + 4t^2) - (\operatorname{arctg} 2t)(1 + 4t^2)'}{(1 + 4t^2)^2} = \frac{(2t)'(1 + 4t^2) - \operatorname{arctg} 2t(0 + 4 \cdot 2t)}{(1 + 4t^2)^2} = \frac{2 - 8t \operatorname{arctg} 2t}{(1 + 4t^2)^2}.$$

Пример 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{x^2 - 3}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Используем уравнения касательной (2) и нормали (3):

$$1) y(x_0) = y(2) = \sqrt{2^2 - 3} = 1;$$

$$2) y'(x) = ((x^2 - 3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2 - 3)^{-1/2} \cdot 2x' = \frac{1}{2}(x^2 - 3)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}};$$

$$y'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2 - 3}} = 2.$$

Подставим x_0 , $y(x_0)$, $y'(x_0)$ в уравнения и получим: $y = 1 + 2(x - 2)$,

или $2x - y - 3 = 0$ — уравнение касательной.

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x - 2), \text{ или } x + 2y - 4 = 0 \text{ — уравнение нормали.}$$

Пример 3. Найти производную y'_x , если функция задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln(5 - 2t) \\ y = \operatorname{arctg}(5 - 2t). \end{cases}$$

Используем правило VII $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

$$\begin{cases} x'_t = \frac{(5 - 2t)'}{5 - 2t} = \frac{-2}{5 - 2t} \\ y'_t = \frac{(5 - 2t)'}{1 + (5 - 2t)^2} = \frac{-2}{1 + (5 - 2t)^2}. \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{-2}{1 + (5 - 2t)^2} : \frac{-2}{5 - 2t} = \frac{5 - 2t}{4t^2 - 20t + 26}.$$

Пример 4. Найти дифференциалы функций:

$$a) y = x + \cos 2x; б) u = 3 + e^{-x}; в) s = \ln 3t.$$

Для дифференциала функции $y = y(x)$ справедлива формула $dy = y'(x)dx$, т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

Решение.

$$a) dy = (x + \cos 2x)' dx = (1 - \sin 2x \cdot 2) dx = (1 - 2 \sin 2x) dx.$$

$$б) du = (3 + e^{-x})' dx = e^{-x}(-1) dx = -e^{-x} dx.$$

$$e) ds = (\ln 3t)' dt = \frac{(3t)'}{3t} dt = \frac{3}{3t} dt = \frac{1}{t} dt.$$

Пример 5. Найти производную второго порядка функции $y = x^2 \ln x$.

Решение. $y'' = (y')'$, поэтому найдём производную первого порядка, а затем второго.

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1).$$

$$y'' = (x(2 \ln x + 1))' = x'(2 \ln x + 1) + x(2 \ln x + 1)' = 2 \ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = x^x$ логарифмическим дифференцированием

$$y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$(\ln y)' = (x \cdot \ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = y(\ln x + 1)$$

$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или б.б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ функций

равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (5)$$

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и затем использовать формулу (5).

Пример 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x - 3}{x^2 + 6}; \quad б) \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x^2 + 5x - 14};$$

Решение.

а) Подставляя в функцию вместо x предельное значение ∞ , определим предел числителя и знаменателя.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 + 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(4 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) = \infty \cdot 4 = \infty, \text{ т. к. } \frac{2}{x^2} \rightarrow 0, \frac{3}{x^3} \rightarrow 0.$$

Аналогично: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 6) = \infty$.

Имеем неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x - 3}{x^2 + 6} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^3 + 2x - 3)'}{(x^2 + 6)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2 + 2}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(12x^2 + 2)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 12x = \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} б) \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x^2 + 5x - 14} &= \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2(-7)^2 + 15(-7) + 7}{(-7)^2 + 5(-7) - 14} = \left(\frac{0}{0}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -7} \frac{(2x^2 + 15x + 7)'}{(x^2 + 5x - 14)'} = \lim_{x \rightarrow -7} \frac{4x + 15}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -7} \frac{4(-7) + 15}{2(-7) + 5} = \frac{-13}{-9} = \frac{13}{9}. \end{aligned}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти производные 1-го порядка данных функций

- 1) а) $y = 3x^3 - \frac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}$; б) $s = (1+t^3)(2-3\arcsin t)$; в) $u = \ln^3 \frac{V}{2}$; г) $z = \frac{5 - \sin 3t}{e^{4t}}$.
- 2) а) $y = 5x - \frac{2}{x^4} - \sqrt[3]{x^6}$; б) $s = (4-3\ln t)(5+2\sin t)$; в) $u = \sin^4(2V+3)$; г) $z = \frac{\sin(2-t)}{2 - \ln 3t}$.
- а) $y = 7x^2 + \frac{4}{x^6} - \sqrt[4]{x^2}$; б) $s = (3 - \cos t)(5 + 6\sin t)$; в) $u = \sqrt[3]{1-4V^2}$; г) $z = \frac{t^3 - e^{3t}}{\arcsin 2t}$.
- 4) а) $y = 5x^2 + \frac{3}{x^4} - \sqrt[3]{x^7}$; б) $s = (3t^3 - 4)(t - 2\cos t)$; в) $u = \ln^2(5V-3)$; г) $z = \frac{\ln(4-5t)}{\sin t}$.
- 5) а) $y = x^5 - \frac{2}{x^3} + 2\sqrt[3]{x^5}$; б) $s = t^4(4 + \arcsin t)$; в) $u = \cos^3(3V+1)$; г) $z = \frac{t - \arcsin 5t}{e^{-t}}$.
- 6) а) $y = x^4 + \frac{1}{x} - 2\sqrt[3]{x}$; б) $s = (3 + \operatorname{tg} t)(1 - 4\operatorname{ctg} t)$; в) $u = \operatorname{tg}^4(3V+2)$; г) $z = \frac{\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2}$.

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 .

- 1) $\frac{x^2-3}{x}$, $x_0 = 1$.
- 2) $\sqrt{5-x^2}$, $x_0 = 2$.
- 3) $\frac{x^2+3x}{3}$, $x_0 = -1$.
- 4) $\sqrt{x+2x}$, $x_0 = 9$.
- 5) $\frac{x^2}{x-2}$, $x_0 = 1$.
- 6) $\sqrt{1+3x}$, $x_0 = 1$.

Задание 3. Найти производную y'_x функции $y=f(x)$, заданной параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

- 1) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x = \cos(2t+6) \\ y = \sin(2t+6) \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x = (1-t)^2 \\ y = \cos(t-1) \end{cases}$

- 4) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = t^2 - 8 \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = (1-4t)^2 \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$

Задание 4. Найти дифференциалы функций:

- 1) $y = \sin 2x + 5$;
- 2) $y = \ln x - x^3$;
- 3) $y = 4 + 8\sin x$;
- 4) $y = 2x - 1$.
- 5) $y = 1 - \cos x$;
- 6) $y = 10 - 3x^2$

Задание 5. Найти производную второго порядка функции $y=f(x)$.

- 1) $y = \ln x + 9$
- 2) $y = \cos x - \ln x$
- 3) $y = \sin x + x^4$
- 4) $y = x^2 + \sin x$
- 5) $y = x + \ln x$
- 6) $y = 3e^x + 2x$

Задание 6. Найти производную функции логарифмическим дифференцированием

- 1) $y = (\sin x)^{\cos x}$
- 2) $y = (\cos x)^x$
- 3) $y = x^{\ln x}$
- 4) $y = (\sin x)^{\ln x}$

5) $y = x^{\cos x}$

6) $y = (tgx)^{\ln x}$

Задание 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя.

1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{x^2 - 5x + 4};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-5x} - 1}{\arctg x}.$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg 2x}{1 - \cos x}.$

4) $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 - 5x + 1}{1 - 3x};$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{\sin x} - 1}{\sin 3x}.$

6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Рекомендуемая литература Основные источники

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. – М.: Образовательно-издательский центр «Академия», 2011
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике. – М.: Издательский центр «Академия», 2011
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2009
4. Дадаян А.А. Математика: учеб.- М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005

Дополнительные источники

1. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2007
2. Математика и информатика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Виноградов Ю.Н., Гомола А.И., Потапов В.И., Соколова Е.В./ - М.: Издательский центр «Академия», 2009
3. Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник для образовательных учреждений нач. и сред. образования / В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. – М.: Издательский центр «Академия», 2011
4. Спирина М.С. дискретная математика: учеб. – М.: Издательский центр «Академия», 2006
5. Омельченко В.П. Математика. – Ростов-на-Дону.: Феникс, 2006